Travaux effectués

Nathanaël Fijalkow

Mes travaux de recherche concernent les liens entre la logique, la théorie des automates et la théorie des jeux. Ces trois domaines sont fortement entremêlés et contribuent au développement des méthodes formelles. Développées depuis plusieurs décennies, ces techniques forment aujourd'hui un ensemble de connaissances théoriques et pratiques solide sur lequel s'appuient de nombreuses applications informatiques.

J'ai travaillé sur deux modèles quantitatifs :

— **Les systèmes à compteurs** sont les systèmes dont l'évolution est régie par un ou plusieurs compteurs. Dans une première partie, je décris les travaux que j'ai effectués sur plusieurs modèles de jeux, d'automates et de logiques dont l'objectif est d'utiliser des compteurs pour spécifier l'existence de bornes.

— **Les systèmes aléatoires** sont les systèmes dont l'évolution est régie par une loi de probabilité. Dans une seconde partie, je décris les travaux que j'ai effectués sur l'étude de propriétés algorithmiques des automates probabilistes.

Ces deux axes constituent les deux parties de mes travaux de thèse, qui sont de taille égale. Au cours de mon post-doctorat, j'ai poursuivi le deuxième axe, l'étude des systèmes aléatoires, en m'attaquant à des problématiques différentes.

J'ai effectué d'autres travaux qui ne s'insèrent pas directement dans les deux dynamiques ci-dessus, et que par conséquent je ne détaille pas. Ils sont listés dans l'index bibiographique.

Existence de bornes pour les systèmes à compteurs

Je décris d'abord les motivations, les modèles proposés et les résultats obtenus au cours des décennies passées. Ensuite, je détaille une première partie de mes travaux dont l'objectif était d'établir des liens entre les différents modèles, et de généraliser les approches. Enfin, j'expose mes résultats sur la mémoire dans les jeux à compteurs, motivés par la conjecture LoCo, qui constituent l'essentiel de mes travaux de thèse pour les systèmes à compteurs.

Logiques exprimant l'existence de bornes

La question d'existence de bornes pour les automates à compteurs apparaît comme un outil dans les travaux de Hashiguchi [Has90], qui a résolu un des principaux problèmes ouverts en théorie des automates : la hauteur d'étoile. Le problème est le suivant : étant donné un langage régulier L et un entier k, existe t-il une expression rationnelle dénotant L utilisant au plus k imbrications de l'opérateur étoile de Kleene ? Dans ce cas, on dit que L au hauteur d'étoile au plus k.
L'approche d'Hashiguchi consiste à réduire ce problème à l'existence de bornes pour un automate à compteurs. Plus précisément, à partir du langage L et de l'entier k, il construit un automate à compteurs $\mathcal{A}$ définissant une fonction $f_{\mathcal{A}} : A^* \to \mathbb{N}$, et montre que L a hauteur d'étoile au plus k si, et seulement si, la fonction $f_{\mathcal{A}}$ est bornée, c'est-à-dire s'il existe un entier N tel que pour tout mot u de A^*, $f_{\mathcal{A}}(u)$ est inférieur ou égal à N ?

Il y a une dizaine d'année, Bojańczyk a introduit la logique $\mathrm{MSO} + \mathbb{U}$ [Boj04], qui permet d'exprimer l'existence de bornes dans un formalisme logique. L'objectif est double : d'une part, obtenir des résultats de décidabilité pour cette logique, et d'autre part réduire, ou reformuler, un certain nombre de problèmes dans ce formalisme, en suivant l'approche d'Hashiguchi. De nombreux résultats ont été obtenus pour ces deux objectifs [BT12; Boj14].

Quelques années plus tard, Colcombet a introduit la logique $\mathrm{costMSO}$ [Col13], avec les mêmes motivations que pour $\mathrm{MSO} + \mathbb{U}$, dont elle peut être vue comme une simplification. Cette deuxième approche a permis le développement de la théorie des fonctions régulières de coût et de résoudre plusieurs problèmes venant de la théorie des automates.Le résultat le plus significatif et intriguant de cette théorie est la réduction de calculer l'indice de Mostowski pour le μ-calcul modal à décider $\mathrm{costMSO}$ sur les arbres infinis [CL08]. Le problème de l'indice de Mostowski est un problème ouvert très important, dont la résolution auraient des retombées en logique et en théorie des automates.
Cette réduction n'implique pas la résolution de ce problème, puisque la décidabilité de $\mathrm{costMSO}$ sur les arbres infinis n'est pas connue. Cependant, elle constitue une avancée majeure, et a permis de résoudre des cas particuliers de ce problème [CKLV13].
La conjecture LoCo s'attaque à la décidabilité de $\mathrm{costMSO}$ sur les arbres infinis, et est l'objet d'une partie de mes travaux.

Relations entre les différents modèles

Les deux logiques $\mathrm{MSO}+\mathbb{U}$ et $\mathrm{costMSO}$ ont donné naissance à différents modèles d'automates et de jeux. Certains de ces modèles sont très similaires ; plusieurs de mes travaux ont mis en évidence ces similarités, établissant des résultats d'équivalence, unifiant et généralisant ces approches.

Dans un article en collaboration avec Krishnendu Chatterjee [CF11b], nous avons mis en évidence le lien entre les objectifs finitaires, introduits pour la vérification de programmes par Alur et Henzinger [AH98], et un fragment de $\mathrm{MSO}+\mathbb{U}$, le fragment temporel. Ce résultat permet de vérifier et de synthétiser des programmes dont les spécifications sont données par des objectifs finitaires, en donnant un modèle d'automate et une logique les caractérisant.

J'ai poursuivi l'étude des objectifs finitaires avec Martin Zimmermann [FZ12; FZ14], par l'étude des jeux à conditions finitaires, étudiés dans [CHH09]. Nous avons introduit les objectifs de parité à coût, généralisant à la fois les objectifs de parité classiques et les objectifs finitaires. L'objectif était de construire des algorithmes efficaces pour les jeux avec ces objectifs, ainsi que d'obtenir des résultats de positionalité pour ces jeux. Ces résultats étendent les résultats précédents, en permettant de combiner des spécifications régulières et finitaires.

Les deux logiques $\mathrm{MSO}+\mathbb{U}$ et $\mathrm{costMSO}$ induisent deux classes de jeux, dites uniformes et non-uniformes. En collaboration avec Krishnendu Chatterjee nous avons caractérisé la classe de graphes pour lesquels ces jeux sont équivalents ; il s'agit de la classe des graphes induits par des processus à pile [CF13]. Comme corollaire de ce résultat d'équivalence, nous transférons les algorithmes d'un modèle à l'autre, et obtenons des procédures pour vérifier et synthétiser des programmes dont les spécifications sont données par des formules de $\mathrm{MSO}+\mathbb{U}$ ou de $\mathrm{costMSO}$.

La conjecture LoCo et mémoire dans les jeux à compteurs

La ligne directrice de mes travaux de thèse sur les systèmes à compteurs est l'existence de stratégies à mémoire finie dans les jeux à compteurs.
Cette étude est motivée par la conjecture LoCo, énoncée par Colcombet et Löding en 2008, alors qu'ils étudiaient l'indice de Mostowski [CL08]. Après avoir réduit ce problème à la décidabilité de $\mathrm{costMSO}$ sur les arbres infinis, ils se sont attaqués à cette dernière. Ils ont montré que sous l'hypothèse de l'existence de stratégies à mémoire finie dans un certain type de jeux à compteurs, $\mathrm{costMSO}$ est décidable. Ils ont conjecturé que cette hypothèse est vérifiée, ce que j'ai nommé la conjecture LoCo. Les résultats ci-dessous sont motivés par cette conjecture.

La question de l'existence de stratégies gagnantes à mémoire finie dans les jeux apparaît dans deux contextes : pour la synthèse de contrôleurs, puisque la mémoire de la stratégie correspond à la taille du programme réalisant le contrôleur, et pour de nombreuses constructions en théorie des automates, par exemple pour montrer l'équivalence entre automates alternants et non-déterministes. J'ai étudié la question de l'existence de stratégies gagnantes à mémoire finie dans un cadre plus général que celui des jeux à compteurs ; avec Florian Horn nous avons considéré les jeux dont les conditions sont des combinaisons booléennes de conditions d'accessibilité [FH13], obtenant une caractérisation de la mémoire nécessaire et suffisante, puis avec Thomas Colcombet et Florian Horn nous avons étendu ces résultats à toutes les conditions topologiquement closes [CFH14].

Les premiers résultats que nous avons obtenus sur les jeux à compteurs, en collaboration avec Martin Zimmermann [FZ12; FZ14], concernent les graphes finis. En collaboration avec Krishnendu Chatterjee [CF13], nous avons étendu ces résultats, obtenant une sous-classe de jeux pour lesquels il existe des stratégies gagnantes à mémoire finie. Ces résultats sont les premiers pour les jeux à compteurs qui s'appliquent à des graphes infinis sans aucune restriction structurelle, ce qui était un premier pas vers la conjecture LoCo.

Les deux résultats principaux que nous avons obtenus sur la conjecture LoCo, en collaboration avec Denis Kuperberg, Florian Horn et Michał Skrzypczak [FHKS15], sont les suivants :

- La conjecture LoCo est fausse en toute généralité.
- La conjecture LoCo restreinte aux arbres fins est vraie.

Le contre-exemple que nous avons construit montre en particulier que les résultats positifs obtenus dans l'article [CF13] sont optimaux. Nous obtenons donc une frontière précise entre les jeux à compteurs admettant des stratégies gagnantes à mémoire finie et ceux n'en admettant pas. Par ailleurs, le résultat positif sur les arbres fins permet d'obtenir la décidabilité de $\mathrm{costMSO}$ sur les arbres fins, qui est un cas particulier non trivial des arbres quelconques.

Ces résultats donnent une approche nouvelle pour la conjecture LoCo. Nous avons énoncé une conjecture plus précise, qui n'est pas mise en défaut par le contre-exemple précédent, et qui implique également la décidabilité de $\mathrm{costMSO}$.

Propriétés algorithmiques des automates probabilistes

Je commence par décrire le cadre dans lequel se placent les travaux que j'ai réalisés, à savoir l'étude des propriétés algorithmiques des automates probabilistes. J'expose mes résultats sur le problème de la valeur 1, qui constituent l'essentiel de mes travaux de thèse pour les systèmes aléatoires. Enfin, je mentionne rapidement mes travaux plus récents, qui étudient les automates probabilistes avec des problématiques différentes.

Automates probabilistes

Les automates probabilistes ont été introduits par Rabin en 1963 [Rab63]. C'est un modèle de calcul très simple et naturel, qui apparaît dans de nombreux domaines, tels que le traitement des langues naturelles et la biologie.

Les travaux que j'ai réalisés ont une visée algorithmique : il s'agit de construire des algorithmes permettant de déterminer si un automate probabiliste possède une propriété donnée. Puisque le modèle d'automate probabiliste est très expressif, de tel algorithmes n'existent pas toujours ; il s'agit alors soit de montrer l'indécidabilité du problème étudié, soit de construire des algorithmes partiels.

La littérature sur les propriétés algorithmiques des automates probabilistes est très riche ; les premiers travaux datent des années 70, et c'est aujourd'hui encore l'objet de nombreuses études. Ceci s'explique en particulier par l'introduction de nouveaux outils et de connections avec d'autres domaines. J'ai exploité dans deux travaux des connections avec des développements récents de la théorie des automates classique ; en collaboration avec Michał Skrzypczak, nous avons donné une preuve très simple de l'indécidabilité de la régularité d'un automate probabiliste [FS15], résultat prouvé dans les années 70 avec des techniques avancées. Dans le même esprit, j'ai obtenu en collaboration avec Sophie Pinchinat et Olivier Serre des résultats de décidabilité pour un modèle d'automate probabiliste sur arbres infinis à l'aide de l'étude de jeux stochastiques sur graphes infinis [FPS13].

Le problème de la valeur 1 pour les automates probabilistes

Le problème de la valeur 1 a été introduit par Bertoni en 1973 ; il s'agit de déterminer, étant donné un automate probabiliste, s'il existe une suite de mots dont la probabilité d'être accepté tend vers 1. La décidabilité de ce problème est demeurée ouverte pendant plusieurs décennies. En 2010, Gimbert et Oualhadj ont montré que ce problème est indécidable [GO10].
Cette première réponse ne clôs pas le sujet : en effet, une question plus générale est "à quel point est le problème de la valeur 1 indécidable ?". Est-il décidable pour des sous-classes naturelles et pertinentes en pratique ? Peut-on construire des algorithmes partiels, dont la réponse est souvent correcte, et quantifier "souvent" ?

En 2012, en collaboration avec Hugo Gimbert et Youssouf Oualhadj, nous avons construit un algorithme, appelé l'algorithme de Markov, et montré qu'il permet de décider le problème de la valeur 1 pour les automates probabilistes dits "résistants aux fuites" (leaktight), une classe que nous avons introduite [FGO12]. Ces résultats s'appuient sur des techniques algébriques, inspirées de la théorie des fonctions régulières de coût [Col13]. La même année, deux autres sous-classes d'automates probabilistes ont été introduites, s'appuyant sur des techniques complètement différentes mais obtenant des résultats similaires [CT12; CSV11]. Se posaient alors les questions suivantes :

1. Comment se comparent les différentes sous-classes ?
2. Existe t-il un algorithme optimal ?

Nous avons montré l'année suivante, en collaboration avec Hugo Gimbert, Edon Kelmendi et Youssouf Oualhadj, que la classe des automates que nous avions introduite contient strictement les deux autres classes [FGKO15]. Les techniques utilisées nous ont permis également d'obtenir des résultats de complexité, en montrant que l'algorithme de Markov utilise un espace polynomial en la taille de l'automate. Ceci nous a encouragé à l'implanter afin d'évaluer ses performances, ce que nous avons fait en collaboration avec Denis Kuperberg [FK14].

L'algorithme de Markov est à ce stade de développement le meilleur algorithme connu, ce qui ne signifie pas qu'il n'existe pas de meilleur algorithme. L'étape suivante était donc de comprendre ce que calcule exactement cet algorithme.

La première piste que nous avons suivie est celle de considérer des automates probabilistes dont les valeurs des transitions probabilistes ne sont pas fixées. En effet, l'algorithme de Markov est indépendant de ces valeurs.
Nous avons montré en collaboration avec Hugo Gimbert, Florian Horn et Youssouf Oualhadj que le problème de la valeur 1 demeure indécidable dans ce cas [FGHO14]. Ceci montre qu'afin de caractériser l'algorithme de Markov, il ne suffit pas d'abstraire les valeurs des transitions probabilistes.

J'ai obtenu une caractérisation de l'algorithme de Markov en mettant en évidence le rôle des vitesses de convergence. Dans l'article [Fij16a], j'utilise des techniques topologiques pour définir les vitesses de convergence polynomiales et exponentielles. Le résultat principal est la caractérisation suivante : l'algorithme de Markov accepte si, et seulement s'il existe une suite de mots polynomiale dont la probabilité d'être accepté tend vers 1. De plus, j'ai étendu le résultat d'indécidabilité de Gimbert et Oualhadj [GO10], montrant que le problème de la valeur 1 est indécidable dès que l'on considère des suites de mots exponentielles.

La combinaison de ces arguments suggère que l'algorithme de Markov est optimal. L'ensemble de ces résultats donne une compréhension précise de la frontière de décidabilité pour le problème de la valeur 1, en développant plusieurs techniques nouvelles, issues de l'algèbre et de la topologie.

Vers l'approximation et la complexité spatiale en ligne

Au cours de mon post-doctorat, j'ai étudié deux questions sur les automates probabilistes.
La première question est celle de l'équivalence. Il existent plusieurs notions qui quantifient la proximité entre deux automates probabilistes. Nous avons étudié en collaboration avec Stefan Kiefer et Mahsa Shirmohammadi la notion de bisimulation [FKS16]. L'objectif à plus long terme est d'utiliser ces notions pour pouvoir parler d'approximations d'automates probabilistes, et les manipuler à approximation près.
La deuxième question est la simulation en ligne d'un automate probabiliste [Fij16b]. Plus précisément, il s'agit d'évaluer la quantité de mémoire nécessaire pour simuler la lecture d'un mot sur un automate probabiliste, de manière lettre à lettre.

Ces deux travaux sont des points de départ pour de futures recherches, et sont discutés dans mon projet de recherche.

Références bibliographiques personnelles (citées)

[CF11b] Krishnendu Chatterjee and Nathanaël Fijalkow. "Finitary Languages". In: *LATA*. 2011, pp. 216–226.

[CF13] Krishnendu Chatterjee and Nathanaël Fijalkow. "Infinite-state Games with Finitary Conditions". In: *CSL*. 2013, pp. 181–196.

[CFH14] Thomas Colcombet, Nathanaël Fijalkow, and Florian Horn. "Playing Safe". In: *FSTTCS*. 2014, pp. 379–390.

[Fij16a] Nathanaël Fijalkow. "Characterisation of an Algebraic Algorithm for Probabilistic Automata". In: *STACS*. (to appear). 2016.

[Fij16b] Nathanaël Fijalkow. "Online Space Complexity of Probabilistic Automata". In: *LFCS*. 2016, pp. 106–116.

[FGHO14] Nathanaël Fijalkow, Hugo Gimbert, Florian Horn, and Youssouf Oualhadj. "Two Recursively Inseparable Problems for Probabilistic Automata". In: *MFCS*. 2014, pp. 267–278.

[FGKO15] Nathanaël Fijalkow, Hugo Gimbert, Edon Kelmendi, and Youssouf Oualhadj. "Deciding the value 1 Problem for Probabilistic Leaktight Automata". In: *Logical Methods in Computer Science* 11.1 (2015).

[FGO12] Nathanaël Fijalkow, Hugo Gimbert, and Youssouf Oualhadj. "Deciding the Value 1 Problem for Probabilistic Leaktight Automata". In: *LICS*. 2012, pp. 295–304.

[FH13] Nathanaël Fijalkow and Florian Horn. "Les jeux d'accessibilité généralisée". In: *Technique et Science Informatiques* 32.9-10 (2013), pp. 931–949.

[FHKS15] Nathanaël Fijalkow, Florian Horn, Denis Kuperberg, and Michał Skrzypczak. "Trading Bounds for Memory in Games with Counters". In: *ICALP*. 2015, pp. 197–208.

[FKS16] Nathanaël Fijalkow, Stefan Kiefer, and Mahsa Shirmohammadi. "Trace Refinement in Labelled Markov Decision Processes". In: *FoSSaCS*. (to appear). 2016.

[FK14] Nathanaël Fijalkow and Denis Kuperberg. "ACME : Automata with Counters, Monoids and Equivalence". In: *ATVA*. 2014, pp. 163–167.

[FPS13] Nathanaël Fijalkow, Sophie Pinchinat, and Olivier Serre. "Emptiness Of Alternating Tree Automata Using Games With Imperfect Information". In: *FSTTCS*. 2013, pp. 299–311.

[FS15] Nathanaël Fijalkow and Michał Skrzypczak. "Irregular Behaviours for Probabilistic Automata". In: *RP*. 2015, pp. 33–36.

[FZ12] Nathanaël Fijalkow and Martin Zimmermann. "Cost-Parity and Cost-Streett Games". In: *FSTTCS*. 2012, pp. 124–135.

[FZ14] Nathanaël Fijalkow and Martin Zimmermann. "Cost-Parity and Cost-Streett Games". In: *Logical Methods in Computer Science* 10.2 (2014).

Références bibliographiques personnelles (non citées)

[CF11a] Krishnendu Chatterjee and Nathanaël Fijalkow. "A Reduction from Parity Games to Simple Stochastic Games". In: *GandALF*. 2011, pp. 74–86.

[FP14] Nathanaël Fijalkow and Charles Paperman. "Monadic Second-Order Logic with Arbitrary Monadic Predicates". In: *MFCS*. 2014, pp. 279–290.

Références bibliographiques

[AH98] Rajeev Alur and Thomas A. Henzinger. "Finitary Fairness". In: *ACM Transactions on Programming Languages and Systems* 20.6 (1998), pp. 1171–1194.

[Boj04] Mikołaj Bojańczyk. "A Bounding Quantifier". In: *CSL*. 2004, pp. 41–55.

[Boj14] Mikołaj Bojańczyk. "Weak MSO+U with Path Quantifiers over Infinite Trees". In: *ICALP*. 2014, pp. 38–49.

[BT12] Mikołaj Bojańczyk and Szymon Toruńczyk. "Weak MSO+U over Infinite Trees". In: *STACS*. 2012, pp. 648–660.

[CSV11] Rohit Chadha, A. Prasad Sistla, and Mahesh Viswanathan. "Power of Randomization in Automata on Infinite Strings". In: *Logical Methods in Computer Science* 7.3 (2011).

[CHH09] Krishnendu Chatterjee, Thomas A. Henzinger, and Florian Horn. "Finitary Winning in omega-regular Games". In: *ACM Transactions on Computational Logics* 11.1 (2009).

[CT12] Krishnendu Chatterjee and Mathieu Tracol. "Decidable Problems for Probabilistic Automata on Infinite Words". In: *LICS*. 2012, pp. 185–194.

[Col13] Thomas Colcombet. "Regular Cost Functions, Part I : Logic and Algebra over Words". In: *Logical Methods in Computer Science* 9.3 (2013).

[CKLV13] Thomas Colcombet, Denis Kuperberg, Christof Löding, and Michael Vanden Boom. "Deciding the weak definability of Büchi definable tree languages". In: *CSL*. 2013, pp. 215–230.

[CL08] Thomas Colcombet and Christof Löding. "The Non-deterministic Mostowski Hierarchy and Distance-Parity Automata". In: *ICALP*. 2008, pp. 398–409.

[GO10] Hugo Gimbert and Youssouf Oualhadj. "Probabilistic Automata on Finite Words : Decidable and Undecidable Problems". In: *ICALP*. 2010, pp. 527–538.

[Has90] Kosaburo Hashiguchi. "Improved Limitedness Theorems on Finite Automata with Distance Functions". In: *Theoretical Computer Science* 72.1 (1990), pp. 27–38.

[Rab63] Michael O. Rabin. "Probabilistic Automata". In: *Information and Control* 6.3 (1963), pp. 230–245.